SUR LE PRINCIPE DE MACH

ROMMEL NANA DUTCHOU

Résumé. Ce document établit essentiellement les conséquences mathématiques qu'on peut déduire des lois expérimentales de l'électrostatique et de la relativité du mouvement. Une nouvelle cinématique est proposée à partir de la transformation de Lorentz qui a été historiquement conçue pour permettre à la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell d'être compatible avec le principe de relativité.

1. Sur la théorie de la relativité générale

Il est incontestable que toute mesure réalisée en physique expérimentale se fait au sein d'un référentiel où on sait paramétrer les trajectoires d'hypothétiques entités qui sont stationnaires au cours de l'expérience, entités entre lesquelles on définit des distances spatiales rigides. Un système de coordonnées ne peut permettre à un expérimentateur d'expliquer ses observations que s'il dispose d'une formule pour reconnaître les trajectoires des entités qui lui paraissent continûment immobiles.

Conformément aux réflexions menées dans [1] et [2], la théorie de la relativité générale présente une certaine ambiguïté car elle ne permet pas de préciser le référentiel d'un expérimentateur désigné en caractérisant les états de mouvement tridimensionnels des entités qu'il peut observer indépendamment des systèmes de coordonnées qu'il peut librement choisir pour les identifier. Mathématiquement, on ne dispose pas d'un procédé pour sélectionner en chaque évènement l'unique sous espace unidimensionnel de l'espace tangent à la variété qu'il reconnaît comme étant de nature purement temporelle de sorte à pourvoir donner un sens à la stationnarité d'une entité ponctuelle, qui serait telle que tout vecteur tangent à sa trajectoire soit de type temps. Dans le formalisme quadridimensionnel de la relativité restreinte, si les trajectoires matérielles sont toujours paramétrées par des fonctions régulières de leurs temps propres, un expérimentateur inertiel $\mathcal{P}$ auquel il est initialement associé un système de coordonnées naturel sait reconnaître en chaque espace tangent à la variété, en utilisant une transformation de Lorentz appropriée, l'unique sous espace unidimensionnel qu'un autre expérimentateur inertiel désigné interprète comme étant purement temporel.

Par ailleurs, on peut s'interroger sur la nécessité théorique de renoncer à la modélisation classique de l'espace physique d'un expérimentateur en faisant le choix d'une variété pseudo-riemanienne de courbure non nulle. Dans [3] l'auteur

rommel.nana.dutchou@gmail.com.

évoque que dans un référentiel inertiel de la relativité restreinte, une entité $\mathcal{K}$ reconnue par $\mathcal{P}$ comme étant un disque en rotation possède intrinsèquement une circonférence circulaire dont la mesure n'est pas compatible avec une éventuelle géométrie euclidienne régissant son espace physique. Mais on sait déjà que tous les expérimentateurs inertiels de la relativité restreinte sont physiquement équivalents et ne peuvent s'accorder sur le fait que $\mathcal{K}$ soit un disque à cause du phénomène de contraction de longueurs de Lorentz. Il n'est donc pas cohérent de lui attribuer à priori une circonférence intrinsèquement circulaire.

2. Sur la notion de référentiel en physique classique

L'espace physique d'un expérimentateur, auquel il est toujours associé une horloge numérique intrinsèquement régulière, est un espace euclidien de dimension trois constitué des trajectoires spatio-temporelles d'hypothétiques entités stationnaires.

Dans le but de permettre à un expérimentateur $\mathcal{P}$ de deviner les durées écoulées au sein de l'horloge d'un expérimentateur mobile $\mathcal{P}'$ et les mesures des distances spatiales constatées par ce dernier, la physique classique énonce l'existence d'une relation universelle de simultanéité entre les évènements et l'existence d'hypothétiques entités universellement reconnues comme étant linéaires et rigides, indépendamment de leurs mouvements par rapport aux expérimentateurs. On peut en déduire qu'il existe une fonction vectorielle $\vec{w}(t)$ telle que, si M' et N' sont deux points de l'espace de $\mathcal{P}'$ dont les trajets dans l'espace de $\mathcal{P}$ sont décrits par $M'(t)$ et $N'(t)$, on ait la relation :

$$\frac{d}{dt}\varphi_p\left(M'(t),N'(t)\right)=\vec{w}(t)\wedge\varphi_p\left(M'(t),N'(t)\right) \tag{1}$$

Cette égalité est écrite entre des éléments de l'espace vectoriel support de l'espace physique euclidien de $\mathcal{P}$ et $\varphi_p\left(M'(t),N'(t)\right)$ est le vecteur d'espace définit à la date t par M' et N'.

L'équation (1) permet de préciser la transformation entre des coordonnées spatiales cartésiennes de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ et permet de révéler une ambiguïté lorsqu'on se demande s'il est cohérent d'associer le même espace physique à deux expérimentateurs $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ qui sont continûment immobiles d'après $\mathcal{P}'$. En effet la différence entre leurs fonctions vitesses $\vec{u}_1(t)$ et $\vec{u}_2(t)$ constatées par $\mathcal{P}$ dépend de leurs positions dans l'espace de $\mathcal{P}'$ par conséquent ils ne peuvent attribuer la même fonction vitesse à $\mathcal{P}$ et il faut conclure que le support d'un référentiel doit être mathématiquement réduit à un unique point matériel.

3. Une définition opérationnelle des notions d'espace et de temps

Un expérimentateur peut toujours être muni d'une horloge intrinsèquement régulière au sens où il sait apprécier l'égalité ou la différence des intervalles de temps

propre définis par deux couples d'évènements qui sont éléments de sa ligne d'univers. Cette horloge peut être choisie avec un affichage numérique, cartésien et normalement orienté : la durée de temps propre écoulée entre les dates successives t_1 et t_2 est proportionnel au réel positif $t_2 - t_1$, la constante positive de proportionnalité caractérisant un choix d'étalon. La notion de simultanéité est à priori arbitraire pour cet expérimentateur et consiste à la définition d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des évènements qui est telle que chaque élément de sa trajectoire appartienne à une et une seule partition. Il lui est par ailleurs fondamentalement associé un espace vectoriel réel de dimension trois lui permettant de distinguer les directions dans lesquelles se trouve d'hypothétiques entités lui paraissant continûment immobiles et de définir le vecteur d'espace décrit par deux telles entités entre lesquelles il existe une distance spatiale invariable. La précision des mesures des trajets à priori arbitraire sous la seule condition d'additionner les valeurs associées à des trajets adjacents.

Ces choix arbitraires de la relation de simultanéité et de mesures spatiales des trajets permettent de caractériser les mouvements des entités et sont absolument justes car ils définissent simplement des variables entre lesquelles il faudra établir des relations pour expliquer les observations, mais pourraient ne pas se prêter à une formulation intuitive des lois de la dynamique. Les postulats de la cinématique classique s'interprètent alors comme un principe de simplicité qu'il faut revisiter. En effet un expérimentateur désigné peut théoriquement constater qu'une certaine entité lui parait toujours linéaire et rigide mais il devrait à priori être le seul à pouvoir faire ce constat et décrire le mouvement d'une telle entité par l'équation (1). Par ailleurs on n'imposera pas l'existence d'une datation universelle des évènements permettant de déterminer les durées effectivement écoulées au sein des horloges régulières identiques et éventuellement relativement en mouvement par une simple soustraction des dates.

On peut remarquer à partir de la transformation de Lorentz qu'il est théoriquement possible de choisir uniquement la caractérisation des mouvements des signaux électromagnétiques et d'en déduire des définitions commodes de la simultanéité entre les évènements et des mesures spatiales des trajets dans un espace supposé euclidien, de sorte à pourvoir décrire tout autre mouvement. Ce procédé ne peut être mathématiquement cohérent que si toute particule élémentaire qui se trouve à une certaine date de son temps propre dans le volume interne d'un signal électromagnétique se propageant dans toutes les directions est condamnée à ne pas dépasser cette frontière mobile et cette cohérence est assurée par la théorie de la relativité restreinte à travers l'association du principe de relativité et des équations de Maxwell qui décrivent le mouvement d'un signal électromagnétique comme étant indépendant de celui de la source.

Précisément, l'espace physique d'un quelconque expérimentateur $\mathcal{P}$ est supposé euclidien et pour déterminer la distance spatiale d qui le sépare d'un évènement et la date t à laquelle celui-ci se produit, il émet à la date t_- de son horloge un signal

électromagnétique qui y est réfléchit et qui lui revient à la date t_+ et il écrit par définition :

$$d = \frac{c}{2}(t_+ - t_-) \qquad t = \frac{1}{2}(t_+ + t_-) \tag{2}$$

La constante c représente l'intensité du mouvement d'un signal électromagnétique et sa valeur arbitrairement choisie par l'expérimentateur dépend des étalons des distances spatiales et des durées. Il déduit les coordonnées spatiales cartésiennes de l'évènement, relativement à une certaine base de l'espace vectoriel qui lui est fondamentalement associé, en explicitant les composant du vecteur $d \times \vec{e}$ où $\vec{e}$ est la direction suivant laquelle il l'observe. On note S_p ce système de coordonnées spatio-temporel dit cartésien et O_p le point de l'espace de $\mathcal{P}$ où il est immobile. M étant un point matériel, si $\vec{e}(M,t)$ est le vecteur unitaire qui décrit la direction dans laquelle $\mathcal{P}$ l'observe à la date t de S_p et si $t_+(M,t)$ est la date à laquelle il reçoit un signal électromagnétique généré par M en cet évènement, alors $\varphi_p\left(O_p, M(t)\right)$ étant le vecteur d'espace qu'il définit avec M, la fonction vecteur vitesse qu'il lui associe s'écrit :

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\varphi_p\left(O_p, M(t)\right) = (t_+ - t)\frac{d\vec{e}}{dt} + (\frac{dt_+}{dt} - 1)\vec{e} \tag{3}$$

Un système de coordonnées cartésien qui est relatif à une base orthonormée de l'espace de l'expérimentateur auquel il est associé est un observateur. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux expérimentateurs auxquels sont associés les observateurs S_p et $S_{p'}$, on dira que l'application définie sur $\mathbb{R}^4$ qui associe aux coordonnées d'un évènement exprimées dans S_p les coordonnés correspondantes dans $S_{p'}$ est une transformation réellement admissible. L'ensemble de ces applications est un groupe pour la loi de composition usuelle et si $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est un de ces éléments, on a la relation :

$$(x_1 - y_1)^2 = \sum_{i=2}^{4}(x_i - y_i)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (f_1(x) - f_1(y))^2 = \sum_{i=2}^{4}(f_i(x) - f_i(y))^2 \tag{4}$$

Afin d'avoir une écriture homogène, on a décrit la première composante d'un observateur en multipliant la coordonnées temporelle par la valeur attribuée à la vitesse d'un signal électromagnétique.

Toute trajectoire de point matériel peut être paramétrée par une fonction infiniment dérivable de son temps propre et relativement à un quelconque système de coordonnées cartésien, les coordonnées spatiales d'une telle trajectoire peuvent être représenter par une fonction dérivable au second ordre de la coordonnée temporelle. On dira que f est une transformation admissible si elle transforme toute trajectoire de point matériel qui est réalisée avec une fonction vitesse d'intensité constante égale à la vitesse d'un signal électromagnétique en une trajectoire similaire.

Proposition 1. *Toute transformation réellement admissible est une transformation admissible.*

L'application différentielle d'une transformation admissible f en un quelconque évènement est toujours élément du groupe de Poincaré et est entièrement déterminée par la fonction réelle f_1 qui est la fonction génératrice de f. Il existe des égalités remarquables qui sont des équations aux dérivées partielles de second ordre satisfaites par les transformations admissibles et tout expérimentateur peut interpréter géométriquement la structure spatiale d'un référentiel en mouvement ce qui se résume dans le cas d'une translation uniforme, lorsqu'on identifie les directions des espaces physiques affines, à une modification du produit scalaire définissant la structure euclidienne tridimensionnelle.

Du fait de la construction d'un système de coordonnées cartésien associé à un expérimentateur, une entité qui lui parait continûment immobile y est décrite par des coordonnées spatiales constantes et la structure de la différentielle de $S_{p'} \circ S_p^{-1}$ permet d'établir que si M' est un point de l'espace de $\mathcal{P}'$ et si $M'(t)$ décrit son trajet dans S_p, son vecteur vitesse dans le référentiel de $\mathcal{P}$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\varphi_p\left(O_p, M'(.)\right) = \vec{\nabla} f_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)^{-1} \tag{5}$$

$\vec{\nabla} f_1$ est le vecteur dont les projections par rapport aux éléments de la base $\mathcal{B}(S_p)$ sont les dérivées partielles premières de f_1 relatives aux coordonnées spatiales de S_p. On doit imposer à cette équation d'exprimer la fonction vitesse de $\mathcal{P}'$ lorsque M' est identique à $O_{p'}$.

D'après la caractérisation originelle des transformations réellement admissibles, si h est la fonction réelle qui à la date t de S_p associe la date indiquée par l'horloge régulière de $\mathcal{P}'$ en l'évènement où elle se trouve, on a la relation :

$$f_1(ct, x, y, z) = \frac{\epsilon c'}{2}\left(h(t_+(ct, x, y, z)) - h(t_-(ct, x, y, z))\right) \tag{6}$$

t_- et t_+ représentent les dates dans S_p d'émission et réception par $\mathcal{P}'$ d'un signal électromagnétique réfléchi en un évènement décrit par ses coordonnées dans S_p. c' est la valeur utilisée par $S_{p'}$ pour représenter l'intensité d'un signal électromagnétique et la présence de ϵ, élément de $\{-1, +1\}$, s'explique par le fait que l'horloge numérique cartésienne de $\mathcal{P}'$ pourrait être anormalement orientée de sorte que la durée écoulée entre les dates successives t'_1 et t'_2 soit le réel positif $\epsilon(t'_2 - t'_1)$.

4. Effet Doppler-Fizeau et principe de relativité

La relation qui décrit l'effet Doppler-Fizeau classique est établie à partir des hypothèses de la section 2 qui permettent de deviner les mesures nécessaires. Étant donné une source générant une onde électromagnétique sinusoïdale et un expérimentateur interceptant directement ce signal, tous les deux étant en translation uniforme par rapport au référentiel éther, si on s'intéresse à la situation simple où leurs vecteurs vitesses sont colinéaires et d'intensités v_s et v_r, les fréquences

propres d'émission et de réception satisfont la relation :

$$f_r = \frac{c - \epsilon_r v_r}{c - \epsilon_s v_s} f_s \tag{7}$$

ϵ_r ou ϵ_s valent $+1$ ou -1 selon que le mouvement s'effectue dans le sens de la propagation du signal entre la source et le récepteur ou dans le sens contraire.

La dissymetrie de cette relation affirme le caractère spécial du référentiel galiléen appelé éther luminifère qui est homogène et isotrope et où il est mathématiquement possible de formuler les lois de l'électrostatique et de Biot et Savart, ou plus généralement la théorie de Maxwell dont les équations précisent explicitement la valeur de la vitesse de propagation d'un signal électromagnétique qui ne dépend que des choix arbitraires des étalons des distances spatiales et des durées. Cette dissymétrie n'est pourtant pas intuitive car une onde électromagnétique se propage dans un milieu immatériel et imperceptible permettant à tous les expérimentateurs galiléens, qui s'accordent sur le fait que chacun d'eux n'est soumit à aucune force et qui sont équivalents pour l'énoncé des lois de la dynamique, d'avoir la même représentation de l'espace vide puisque chacun ne peut fondamentalement apprécier les mouvements des entités que par rapport à lui même.

Woldemar Voigt va alors établir dans [4] une transformation linéaire des coordonnées qui laisse invariante l'équation d'onde satisfaite par un champ de vecteurs à divergence nulle et l'ensemble de ces applications forment le groupe d'Henri Poincaré. Cet ensemble contient des sous groupes particuliers décrivant chacun les formules spéciales d'Hendrik Antoon Lorentz pour qui elles permettent de mettre en évidence des variables pratiques dans les référentiels qui sont en translation uniforme par rapport à l'éther. Albert Einstein considère que ces formules déterminent le temps propre qui s'écoule effectivement au sein d'une horloge en translation uniforme par rapport à un quelconque expérimentateur galiléen utilisant un système de coordonnées cartésien conçu à la section 3 et sa théorie de la relativité restreinte établit l'équivalence de tous les expérimentateurs galiléens pour l'énoncé des lois de la dynamique et de l'électromagnétisme. Albert Einstein explique que si les horloges des expérimentateurs galiléens $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont identiques et si $\mathcal{P}'$ est en translation uniforme de vitesse v dans un système de coordonnées cartésien de $\mathcal{P}$ où la vitesse constante de propagation d'un signal électromagnétique est c, si $\mathcal{P}'$ émet régulièrement des signaux électromagnétiques qui sont séparés par une durée propre $\Delta T'$, $\mathcal{P}$ affirmera que les émissions de ces signaux la durée :

$$\Delta t = \frac{\Delta T'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{8}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}$ affirmera que les réceptions de ces signaux la durée propre :

$$\Delta T = \Delta T' \sqrt{\frac{1 - \epsilon \frac{v}{c}}{1 + \epsilon \frac{v}{c}}} \tag{9}$$

ϵ ayant pour valeur $+1$ ou -1 selon que le mouvement s'effectue dans le sens de la propagation du signal entre la source et le récepteur ou dans le sens contraire.

5. Électrostatique et principe de Mach

Les expérimentateur galiléens de la physique classique étaient ceux qui ne sont soumis à aucune force et la physique contemporaine a déjà renoncé en ce sens à la notion absolue de force puisque qu'un tel expérimentateur ne peut pas physiquement se distinguer de celui qui serait en chute libre et plongé dans un champ gravitationnel constant. Cette seule analogie ne peut pas suffire à mettre en évidence l'éventuelle nature non euclidienne de l'espace d'un expérimentateur et s'il est vrai que la théorie de la relativité générale ne décrit pas la gravitation par la notion de force, elle ne propose pas un procédé pour déterminer le champ de tenseur métrique défini sur l'espace-temps par un expérimentateur qui est toujours accéléré par rapport à son état de chute libre à partir de celui qui est défini par un second expérimentateur qui est continûment en chute libre.

Le principe de Mach est le principe de relativité de la notion de mouvement et peut s'énoncer en proposant que les notions d'espace et de simultanéité doivent être définies par chaque expérimentateur à partir de ses perceptions sensorielles et si chacun effectuait un choix commode, ils seraient tous équivalents pour la formulation des lois et la nature accélérée ou uniforme du mouvement d'une entité serait une réalité physiquement relative à l'expérimentateur qui la décrit. Une conséquence est que pour un quelconque expérimentateur, la nature accélérée du mouvement d'une particule élémentaire reconnu dans un système de coordonnées commode devrait la doter d'une propriété interactive de type gravitationnelle et on va le mettre en évidence en utilisant les systèmes de coordonnées cartésiens précisés à la section 3.

Puisque l'électrostatique ne peut pas être conçue dans un cadre de référence privilégié qui n'existe pas, il faut définir la charge électrique d'une particule élémentaire comme étant une propriété lui permettant d'influencer les trajectoires de ses semblables suivant la loi de Coulomb dans le référentiel dont elle est le support. La physique contemporaine considère déjà que tous les expérimentateurs en chute libre constatent localement les lois de l'électrostatique indépendamment de leurs mouvements relatifs. Considérons dans le référentiel d'un expérimentateur $\mathcal{P}$ une particule élémentaire de masse inerte m qui porteuse d'une charge électrique q' et intéressons nous à la force qu'elle exerce sur une seconde particule élémentaire q. L'objectif est de préciser les structure des champs générés par q' dans le but de d'utiliser à postériori le principe de superposition des vecteurs forces pour conclure

que cette structure sera celle associée à une quelconque distribution de matières chargées. On suppose donc que la trajectoire de q n'est perturbée que par la présence de q'. On peut noter $\vec{u}'(t')$ le vecteur vitesse de q dans le référentiel de q' et la relativité restreinte établit la relation :

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = \frac{d}{dt'}\left(\frac{m\vec{u'}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\right) \tag{10}$$

Tous les observateur décrivent le mouvement d'un signal électromagnétique par la constante c et $\vec{E}'$ est le champ coulombien qu'on peut caractériser par des équations aux dérivées partielles car à une constante multiplicative près, c'est l'unique champ de vecteurs qui est indépendant du temps, à divergence nulle et à rotationnel nul, et qui dérive d'un potentiel à symétrie sphérique. Une particule élémentaire n'est pas supposée être un point matériel mais on admet que sa charge électrique est localisée de façon ponctuelle en son sein. Si $\vec{u}(t)$ est le vecteur vitesse de q dans le référentiel de $\mathcal{P}$, alors la force recherchée y est décrite par la relation :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) \tag{11}$$

Si q' est en translation uniforme dans le référentiel de $\mathcal{P}$, les équations (10) et (11) permettent de calculer les champs de vecteurs qui lui sont associés et de constater qu'ils sont de nature électromagnétique et sont solutions des équations de Maxwell dites dans le vide ce qui fait dire qu'une charge électrique animée d'un mouvement de translation uniforme génère une onde électromagnétique non sinusoïdale qui est une solution non triviale de l'équation de propagation. Ces résultats justifient la relation fondamentale de la dynamique qui a été proposée au sens où on a construit l'expression de la force électromagnétique, les lois expérimentales de Biot et Savart et le théorème d'Ampère à partir de l'électrostatique de Coulomb. Le phénomènes d'induction électromagnétique et la loi de Faraday sont suggérés par les équations de Maxwell qui sont toutes mises en évidence.

Dans la généralité où on ne fait pas d'hypothèse sur le mouvement de q', la force $\vec{F}$ contiendra une composante de nature gravitationnelle.

6. Conclusion

Ce document reprend entièrement la théorie de la relativité restreinte dont la cohérence et la pertinence expérimentale sont avérée et la généralise établissant les mathématiques qui doivent exister pour que tous les expérimentateurs possibles constatent les lois expérimentales de l'électrostatique. Les postulats des mécaniques quantiques matricielle et ondulatoire ont étés conçus pour expliquer la stabilité et

les rayonnements quantifiés des atomes qui seraient constitués d'électrons et de nucléons en mouvement relatif du fait de leurs interactions. La présente théorie établit de nouvelles formules déterministes pour une étude classique de ce problème fondamentale.

Références

[1] John D. Norton, *General covariance and the foundations of general relativity : eight decades of dispute*, Rep. Prog. Phys., 56, pp. 794, pp. 835-7, 1993

[2] Patrick Cornille, *Essays on the Formal Aspects of Electromagnetic Theory*, World Scientific. p. 149, 1993

[3] Albert Einstein, *Relativity : The Special and General Theory*, Methuen & Co Ltd, Ch.23, 1920

[4] Woldemar Voigt, *Ueber das Doppler'sche Princip*, Göttinger Nachr., Nr. 8, 41-51. Sitzung vom 8. Januar 1887. Ausgegeben am 10. März 1887